J. Sains Dasar 2014 3(1) 20 - 24

Aplikasi diagonalisasi matriks pada rantai Markov

(Application of matrix diagonalization on Markov chain)

Bidayatul hidayah, Rahayu Budhiyati V., dan Putriaji Hendikawati

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang (UNNES), Semarang 50229, Indonesia dan email: bidayatul.hudayah@gmail.com

diterima 2 Desember 2013, disetujui 3 Februari 2014

Abstrak

Rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang bersyarat kejadian yang akan datang hanya bergantung kepada kejadian sekarang dan tidak tergantung kepada kejadian yang lalu. Peluang peralihan pada tingkat keadaan seimbang (peluang *steady state*) adalah peluang peralihan yang sudah mencapai keseimbangan, sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi atau perubahan tahap yang terjadi. Dalam tulisan ini dikaji nilai eigen untuk menentukan *state* dan diagonalisasi untuk menentukan vektor kondisi. Pemecahan yang dilakukan dengan mengupas definisi dan teorema.

Kata kunci: matriks, diagonalisasi matriks, rantai Markov

Abstract

Markov chain is a series of events in which the conditional probability upcoming events only depend on the current events and do not depend on the previous occurrence. Transition probabilities at the steady state level (steady state probability) is a transition probability that has reached equilibrium, so that it will not change with time or phase changes that occur. This paper determines the eigenvalue states and diagonalization to determine the steady state. The solution is obtained by peeling definitions and theorems.

Key words: matrix, matrix diagonalization, Markov chain

Pendahuluan

Dalam kehidupan, sejumlah fenomena dapat di pikirkan sebagai percobaan yang mencakup sederetan pengamatan yang berturut–turut dan bukan satu kali pengamatan. Umumnya, tiap pengamatan dalam suatu percobaan tergantung pada beberapa atau semua pengamatan masa lalu hasil tiap pengamatan, umumnya ditentukan dengan hukum–hukum peluang. Studi tentang percobaan dalam bentuk seperti ini dikenal dengan teori proses stokastik.

Rantai Markov merupakan sebuah proses stokastik, dimana kejadian pada masa mendatang hanya bergantung pada kejadian hari ini dan tidak bergantung pada keadaan masa lampau. Konsep dasar Rantai Markov diperkenalkan sekitar tahun 1907 oleh seorang Matematisi Rusia Andrei A. Markov (1856 – 1922) yang membahas suatu rantai yang disebut Rantai Markov.

Rantai markov terdefinisi oleh matriks peluang transisinya. Matriks peluang transisi adalah suatu matriks yang memuat informasi yang mengatur perpindahan system dari suatu state ke state yang lainnya. Matriks peluang transisi sering disebut juga matriks stokastik karena peluang transisi p_{ij} adalah tetap dan tidak bergantung pada waktu t, dimana p_{ij} adalah peluang transisi satu langkah yang bergerak dari keadaan i ke keadaan j. Matriks peluang transisi juga merupakan matriks persegi. Melalui matriks peluang transisi maka dapat ditentukan state pada rantai Markov.

Masalah dasar dari pemodelan stokastik dengan proses markov adalah menentukan state yang sesuai, sehingga proses stokastik yang berpadanan akan benar-benar memiliki sifat markov, yaitu pengetahuan terhadap state saat ini adalah cukup untuk memprediksi perilaku stokastik dari proses di waktu yang akan datang.

Vektor eigen dari A adalah Jika A matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n jika Ax adalah kelipatan dari x yakni $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Nilai eigen dapat dimisalkan sebagai kasus proses markov sehingga memungkinkan untuk menentukan state menggunakan nilai eigen. Oleh karena itu penulis akan mencoba menentukan state menggunakan nilai eigen. Vektor-vektor eigen yang terbentuk digunakan untuk membentuk matriks pendiagonal Y untuk menghitung vektor-vektor kondisi untuk menentukan vektor tunak.

Metode Penelitian

Metode penelitian memegang peranan yang sangat penting dalam pencapaian tujuan penelitian yang telah ditetapkan agar penelitian dapat berjalan lancar. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah study pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah mengupas definisi-definisi yang berhubungan dengan permasalahan yang diangkat, melengkapi definisi dengan contoh-contoh, dan membuktikan teorema.

Hasil dan Diskusi

Definisi 1. Proses Stokastik adalah himpunan acak yang merupakan fungsi waktu (*time*) atau proses acak variabel acak.

Definisi 2. Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel acak dari suatu proses stokastik disebut Ruang state.

Definisi 3. Jika proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ mempunyai sifat

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

untuk setiap harga $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sembarang n, dan $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ (ruang state) maka proses itu disebut proses markov.

Definisi 4. Jika sebuah rantai markov mempunyai k kemungkinan keadaan, di mana ditandai dengan 1, 2, …, k, maka probabilitas bahwa sistem berada dalam keadaan j pada suatu pengamatan setelah mengalami keadaan i pada pengamatan sebelumnya, dilambangkan dengan p_{ij} dan disebut probabilitas transisi (*transition probability)* dari keadaan j ke keadaan i. Matriks $P = [p_{ij}]$ disebut matriks transisi rantai markov (*matrix transition of the Markov Chain*).

Definisi 5. Misalkan diketahui ruang state S berhingga, $S = \{0,1,2, \dots, n\}$, P matriks berukuran nxn, disebut matriks transisi

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan $p_{ij} \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$ $(i, j = 0,1,2, \dots n)$.

Definisi 6. Vektor keadaan (*state vector*) untuk sebuah pengamatan pada suatu rantai markov yang mempunyai k keadaan adalah sebuah vektor baris x dimana komponen ke-i, yakni x_i merupakan probabilitas bahwa sistem berada pada keadaan ke-i pada saat itu.

Definisi 7. Sebuah Matriks transisi bersifat reguler jika suatu pangkat bulatdari matriks tersebut mempunyai entri-entri positif.

Teorema 1. Jika P merupakan matriks transisi rantai markov dan $x^{(n)}$ adalah vector keadaan pada pengamatan ke-n, maka $x^{(n+1)} = x^{(n)} P$.

Bukti.

Diketahui P merupakan matriks transisi rantai markov sehingga $P = \Pr(X_{n+1} = S_k | X_n = S_j)$.

Diketahui $x^{(n)}$ merupakan vektor keadaan pada pengamatan ke-n, Sehingga $x^{(n)} = \Pr(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j)$, dan $x^{(n+1)}$ merupakan vektor vektor keadaan pada pengamatan ke-$n+1$,

sehingga $x^{(n+1)} = \Pr\left(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j \wedge X_{n+1} = S_k\right)$.

Maka $x^{(n+1)} = \Pr\left(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j \wedge X_{n+1} = S_k\right) = \Pr\left(X_0 = S_a \wedge \cdots \wedge X_{n-1} = S_i \wedge X_n = S_j\right)\Pr\left(X_{n+1} = S_k \middle| X_n = S_j\right) = x^{(n)}P$

[1].

Sehingga

$x^{(1)} = x^{(0)}P$

$x^{(2)} = x^{(1)}P = x^{(0)}P^2$

$x^{(3)} = x^{(2)}P = x^{(0)}P^3$

$x^{(n)} = x^{(n-1)}P = x^{(0)}P^n$

vektor keadaan awal $x^{(0)}$ dan matriks transisi P akan menentukan $x^{(n)}$ untuk

$n = 1, 2, \dots \dots$

Teorema 2. Jika P adalah sebuah matriks transisi, maka ketika $n \to \infty$

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

dimana q_k adalah bilangan-bilangan positif sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Bukti.

Akan ditunjukkan P^n matriks transisi reguler untuk matriks dengan semua komponen barisnya sama.

Misalkan kolom j dari P^n adalah $P^n y$ dimana y adalah vektor kolom dengan 1 di entri ke-j dan 0 di entri yang lainnya.

Misalkan y suatu r komponen vektor kolom, dimana r adalah bilangan dari state dari rantai. diasumsikan $r > 1$ yaitu $y = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

Misalkan M_n dan m_n berturut-turut maksimum dan minimum komponen dari vektor $P^n y$.

Vektor $P^n y = P.\,P^{n-1}y$.

Karena setiap komponen dari $P^n y$ adalah rata-rata dari komponen dari $P^{n-1}y$, sehingga $M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \cdots$ dan $m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots$.

Setiap urutan adalah sama dan dibatasi $m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0$.

Akibatnya setiap urutan mempunyai limit sampai n menuju tak hingga.

Misalkan $M = \lim_{n\to\infty} M_n$ dan $m = \lim_{\square\to\infty} m_n$.

Diketahui bahwa $m \leq M$ sehingga $M_n - m_n$ menuju 0.

Misalkan d elemen terkecil dari P.

Karena semua entri dari P positif, maka $d > 0$.

Dari lemma $M_n - m_n \leq (1 - 2d)\left(M_{n-1} - m_{n-1}\right)$

sehingga $M_n - m_n \leq (1 - 2d)^n\left(M_0 - m_0\right)$.

Karena $r \geq 2$, $d \leq \frac{1}{2}$, maka $0 \leq 1 - 2d < 1$, maka selisih $M_n - m_n$ menuju 0 dengan n menuju tak hingga.

Karena setiap komponen dari $P^n y$ terletak diantara M_n dan m_n, setiap komponen harus mendekati bilangan yang sama $u = M = m$, ini menunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} P^n y = \square$, dimana **u** adalah semua vektor kolom dari komponen yang sama dengan u.

Misalkan y vektor dengan komponen j sama dengan 1 dan 0 untuk komponen yang lainnya.

Maka $P^n y$ adalah kolom j dari P^n. Lakukan ini untuk tiap j membuktikan bahwa kolom dari P^n mendekati vektor kolom konstan.

Ini berarti, baris dari P^n mendekati vektor baris w, atau $\lim_{n\to\infty} P^n = \square$.

Tinggal menunjukkan semua entri di W positif.

Sebelumnya, misalkan y vektor dengan komponen j sama dengan 1 dan komponen yang lainnya adalah 0.

Maka Py adalah kolom j dari P, dan kolom ini mempunyai semua entri positif. Komponen minimum dari vektor Py didefinisikan m_1, $m_1 > 0$.

Karena $m_1 < \square$, maka $m > 0$.

Ini berarti nilai dari m hanya komponen j dari w, jadi semua komponen w adalah positif [2].

Teorema 3. Jika P adalah sebuah matriks transisi reguler dan z adalah suatu vektor probabilitas, maka ketika $n \to \infty$

$$\square P^n \to [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = q$$

dimana q adalah sebuah vektor probabilitas tetap, yang tidak tergantung pada n, dan semua entrinya adalah positif.

Bukti.

Dari teorema sebelumnya

Jika P adalah sebuah matriks transisi reguler, maka ketika $n \to \infty$

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$ dimana q_k adalah bilangan-bilangan positif sedemikian rupa sehingga $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Misal $q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k]$ adalah vektor probabalitas ketika $n \to \infty$.

Ambil sebarang $\square = [\square_1 \quad \square_2 \quad \cdots \quad \square_k]$ vektor probabilitas.

Maka

$$\square P^n = [\square_1 \quad \square_2 \quad \cdots \quad \square_k] \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \square_1 q_1 + \square_2 q_1 + \cdots + \square_k q_1 \\ \square_1 q_2 + \square_2 q_2 + \cdots + \square_k q_2 \\ \vdots \\ \square_1 q_k + \square_2 q_k + \cdots + \square_k q_k \end{bmatrix}$$

$$= (\square_1 \quad \square_2 \quad \cdots \quad \square_k)[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = (1)q = q$$

Teorema 4. Vektor keadaan tunak q dari sebuah matriks transisi reguler P merupakan vektor probabilitas yang unik, yang memenuhi persamaan qP=q.

Bukti.

$$qP = \square P^n P$$

$$= [\square_1 \quad \square_2 \quad \cdots \quad \square_k] \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \square_1 q_1 + \square_2 q_1 + \cdots + \square_k q_1 \\ \square_1 q_2 + \square_2 q_2 + \cdots + \square_k q_2 \\ \vdots \\ \square_1 q_k + \square_2 q_k + \cdots + \square_k q_k \end{bmatrix}$$

$$= (\square_1 \quad \square_2 \quad \cdots \quad \square_k)[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_k] = (1)q = q$$

Jadi $qP = q$

teorema di atas juga dapat dinyatakan dengan pernyataan bahwa suatu sistem linear homogen

$$q(I - P) = 0$$

mempunyai sebuah vektor solusi q yang unik dengan entri-entri tak negatif yang memenuhi syarat $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.

Sifat jangka panjang suatu pengamatan, dapat ditentukan dengan nilai eigen dan vektor eigen matriks transisi dari persamaan karakteristik

$$\lambda I - A = 0$$

dengan I matriks identitas dan A matriks transisi.

Vektor-vektor kondisi dihitung dengan menetapkan

$$X^{(n)} = X^{(0)}\left(YDY^{-1}\right)^n = X^{(0)}YD^nY^{-1}$$

dengan meningkatnya n maka X^n mendekati vektor tunak x.

Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. *State* atau sifat jangka panjang dapat ditentukan cara

   a. Menentukan matriks transisi dari suatu kasus
   b. Menentukan akar persamaan yaitu
      $$\det(\lambda I - A) = 0$$
      dengan I matriks identitas dan A matriks transisi.
   c. Maka state yaitu λ ditemukan.
2. Vektor-vektor kondisi dapat ditentukan dengan
   a. Menentukan vektor eigen dengan λ (state) yang sudah ditemukan pada (2)
   b. Menentukan matriks pendiagonal A yang vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari A.
   c. Vektor-vektor kondisi dapat dihitung dengan
      $$X^{(n)} = X^{(0)} Y D^n Y^{-1}$$
      dengan Y adalah matriks pendiagonal A.
   d. Dengan meningkatnya n maka X_n mendekati vektor tunak x.

Pustaka

[1] J. Kenemy dan J. Snell, Finite Markov Chains, Springer-Verlag, New York Inc, 1976.
[2] J. Snell dan C. Grinstead, Introduction to Probability, The American Mathematical Society, 2006.